

Projet « HoleNet » - Frederic Amblard & Bertrand Jouve
« Dynamiques des parties non denses des réseaux complexes »



**Institut des
Systèmes
Complexes**
de Toulouse



FRAMESPA >>>
France Amériques Espagne
Sociétés Pouvoirs Acteurs

Présentation du Projet

Le terme de « réseau » désigne un système d'interactions entre entités (personnes, animaux, neurones, gènes, entreprises, ...) qui admet une représentation mathématique abstraite sous forme de graphe : les entités correspondent aux sommets du graphe et les interactions ou les relations aux arêtes. Les travaux initiés dans les années 2000, qui ont conduit à la constitution d'une « science des réseaux », ont montré que de nombreux grands réseaux réels (World Wide Web, réseaux d'interactions de protéines, réseaux de transports, ...) partagent des propriétés similaires qui révèlent une architecture en « petits-mondes » avec des distributions de mesures de centralité (degré, intermédiarité, ...) qui suivent souvent des lois de faibles puissances (sans échelles typiques) et un coefficient de clustering (densité des graphes de voisins) élevé ([1] et [2]). Les premiers modèles de graphes génériques, produits essentiellement avant les années 2000 (par exemple, les graphes d'Erdős-Rényi ou les grilles régulières pour ne citer que ces deux exemples extrêmes) ne constituent pas de bons modèles pour ces grands réseaux. De nombreuses recherches ont donc consisté à préciser les propriétés partagées par les grands réseaux que l'on rencontre en pratique afin d'améliorer les modèles génériques. Ces recherches de régularités et de lois d'évolutions, caractéristiques de la physique et des sciences de la nature, ont été largement portées par les chercheurs de ces domaines.

Il est cependant maintenant largement convenu que ces propriétés topologiques partagées ne sont pas suffisantes pour expliquer la diversité et la complexité des architectures des réseaux réels rencontrés. La dynamique et la structure multi-échelles de ces réseaux sont des caractéristiques au fondement même de ces architectures [3]. Une approche possible pour capturer la structure multi-échelles peut consister à identifier les petits mondes qui correspondent souvent à des sous-parties denses en connexion (recouvrantes ou non) du réseau (appelées aussi « communautés ») et à étudier le réseau mésoscopique d'assemblage de ces communautés et sa dynamique. voire d'étudier ensuite séparément chacun de ces petits mondes. En terme de modèles génériques, des modèles de réseaux hiérarchiques à base de structures fractales ont été proposés [4]. Ces approches ont permis une meilleure compréhension des interactions à l'œuvre dans des domaines aussi divers que les réseaux sociaux, les réseaux de neurones réels ou les réseaux de transports, pour ne citer que ceux-ci. Elles restent cependant encore insuffisantes pour fournir des modèles aux architectures et dynamiques aussi riches que ce que l'on rencontre en pratique.

L'objet de ce projet et de la thèse prévue est de compléter ces outils de modélisation réseau en prenant le contre-pied de cette approche par communautés et en considérant que les parties non-denses d'un réseau sont aussi des éléments structurants de son organisation. Cette posture rejoint en sociologie des réseaux celle de l'importance des trous structuraux de Burt [5] qui jusqu'à aujourd'hui n'est pas implémentée dans des modèles formels de réseaux sociaux. L'objectif sera de montrer que des études hybrides basées à la fois sur des parties denses et non denses permettent des avancées qualitative et quantitative dans la description des réseaux complexes et de leurs dynamiques, et *in fine* de proposer des modèles génératifs plus réalistes basés sur ces deux dimensions.

Le projet est donc fondamentalement interdisciplinaire et relève complètement de l'étude des systèmes complexes. Cette thèse s'inscrit dans la dynamique plus large des équipes de recherche pluridisciplinaires engagées dans l'Institut des Systèmes Complexes de Toulouse pour lesquels la question de la bonne modélisation des réseaux complexes est un enjeu partagé.

Le projet prévoit 4 chantiers : A) Observations et descriptions interdisciplinaires des parties non denses d'une réseau complexe ; B) mesures et outils mathématiques innovants ; C) dynamiques et modèles génériques hybrides ; D) applications sur des benchmark de réseaux réels. Même si

certains de ces chantiers sont plus ancrés dans une discipline, ils chercheront tous l'interdisciplinarité. Cela pourra notamment être favorisé par un déroulement simultané des chantiers pendant le déroulement du projet, favorisant ainsi l'échange entre chantiers.

A) Observations et descriptions interdisciplinaires des parties non denses d'un réseau complexe

Une quinzaine d'unités de recherche toulousaines comptent des chercheurs qui s'intéressent aux systèmes complexes et la quasi totalité de ces chercheurs porte en fait un intérêt aux réseaux complexes. Ce premier chantier consistera à formuler, expliciter, chacun dans son domaine d'application ou dans son environnement conceptuel, les questions et intérêts pour les parties non denses d'un réseau. Il s'agira de partager chacune de ces formulations afin de pouvoir évaluer les convergences et l'intérêt de transpositions d'un domaine à un autre. L'objectif de ce chantier sera d'évaluer où se situent les verrous et les centres d'intérêts, partagés ou non, et ainsi de guider le choix des indicateurs à inclure dans les modèles formels à construire (voir chantiers suivants).

B) mesures et outils mathématiques innovants

B.1) Approche métrologique

Cette première approche est une bonne introduction pour se frotter aux questions posées. Par un travail d'exploration de modèles génériques classiques et de benchmarks de réseaux, il s'agit de proposer quelques premiers indicateurs permettant de caractériser et quantifier les parties non denses d'un réseau. Si la densité en connexions permet de définir les parties non denses, caractériser la diversité de leurs formes nécessite la mise en place de mesures ad-hoc. On cherchera aussi à évaluer l'intérêt de la modularité pour mesurer la qualité d'une partition d'un réseau en parties non denses et éventuellement on proposera une nouvelle mesure. Ce travail pourra servir pour améliorer les descriptions des réseaux réels et la mise en place de modèles génériques plus adaptés. Il est une première étape vers une analyse innovante des dynamiques multi-niveaux des réseaux réels.

B.2) Approche de la topologie combinatoire.

L'épluchage de graphes par sommet consiste à supprimer successivement les sommets d'un graphe si les voisinages de ces sommets vérifient certaines conditions. Il existe deux très beaux théorèmes. Le premier est dû à Dirac (1960) et spécifie qu'un graphe est démontable par sommet simplicial si et seulement s'il est un graphe de corde (tout cycle de longueur supérieure ou égale à 4 admet une corde). Un sommet est simplicial si son voisinage est complet et un graphe est simplicial si on peut successivement enlever des sommets simpliciaux pour aboutir sur le point. Le deuxième théorème dû indépendamment à Quillot (1983) et Nowakowski & Winkler (1983) montre que les graphes démontables sont les graphes « cop win ». Un sommet est démontable s'il est dominé (*ie.* si son voisinage est inclus dans le voisinage d'un sommet qui lui est voisin). Nous avons généralisé avec Etienne Fieux (IMT) la notion de démontabilité par une notion de k -démontabilité [6]. Un sommet est k -démontable si son voisinage est $(k-1)$ -démontable. Nous montrons un certain nombre de propriétés des graphes k -démontables et construisons quelques relations biunivoques avec certaines propriétés du complexe simplicial des cliques associées.

Ces opérations d'épluchage permettent de déconstruire un graphe, un réseau, sur des formes minimales. La caractérisation des graphes minimaux est une question ouverte, tout comme la caractérisation des classes de graphes s'épluchant sur les mêmes minimaux. Mais par exemple des cycles sans corde de longueur supérieure ou égale à 4 sont minimaux pour tout k . Plus généralement, quelques tests sur différents types de graphes semblent montrer que la forme minimale d'un graphe après épluchage est fortement liée à la configuration de ses parties non-denses en connexions. Ainsi le k -épluchage pourrait alors servir à classer les réseaux en fonction des parties non-denses de celui-ci. La k -démontabilité sera implémentée pour être testée sur des benchmarks et réseaux réels.

C) dynamique et modèles génériques hybrides

C.1) Approche par la dynamique de patterns

Si la communauté scientifique s'accorde maintenant sur le fait que les réseaux réels partagent des propriétés communes quant à leur configuration topologique (hétérogène, petit monde, ...), les

observations sont moins évidentes concernant la dynamique : observe-t-on des similarités dans la dynamique des grands réseaux rencontrés en pratique ? La question n'est pas simplement celle d'une multiplication des observations mais aussi celle de quoi observer et avec quels outils ? Nous proposons ici de construire des outils de mesure de la dynamique des parties non denses et de les associer à ceux utilisés plus classiquement pour les parties denses (ou communautés). On pourra s'aider de la métrologie réalisée dans l'approche B.1. mais aussi étudier la dynamique des configurations des parties denses du complémentaire du graphe (les arêtes deviennent de non-arêtes et réciproquement) sur quelques modèles génériques et benchmarks de réseaux dynamiques. Il s'agira ensuite d'évaluer la pertinence d'une approche hybride associant des mesures sur le graphe et son complémentaire. On proposera ensuite des mesures nouvelles de la dynamique locale des parties non denses, fonction par exemple de l'évolution de patterns caractéristiques (cycles sans cordes, ...).

C.2) Approche par modèle générique dynamique de type « non attachement préférentiel ».

De nombreuses études ont cherché des principes simples de constructions de réseaux de sorte à reproduire les caractéristiques des réseaux rencontrés en pratique. En particulier, le modèle d'attachement préférentiel popularisé par Albert & Barabasi [7] consiste à ajouter successivement des nœuds à un réseau en les attachant aux nœuds existants avec une probabilité proportionnelle au degré de ces nœuds. Ce principe de renforcement permet de produire des réseaux dont les distributions de degrés sont hétérogènes (en loi de faible puissance), ce qui est le cas de nombreux réseaux réels. Ce modèle et ses différentes variantes (dont celui de Jackson pour lequel plusieurs nœuds peuvent être ajoutés en même temps) ne sont pourtant pas totalement satisfaisant pour reproduire le comportement des réseaux réels. En particulier le coefficient de clustering des réseaux réels est souvent indépendant de la taille du réseau ce qui n'est pas vérifié par le modèle de Albert & Barabasi. Par ailleurs, les réseaux réels se construisent souvent à la fois par des processus d'attraction (amitié, coopération) et de répulsion (concurrence) que l'on pourrait modéliser par la concomitance de processus d' « attachement préférentiel » et de « non attachement préférentiel ». Il s'agit donc de formaliser cette idée, de tester sa convergence (vitesse, forme des réseaux aux limites, phénomènes de seuil, ...) et de mesurer en quoi de telles règles locales permettent de former des parties non denses d'un type donné. Ce type de modèle sera étudié par une approche de type modélisation et simulation multi-agent qui permet non seulement d'en étudier les propriétés de manière expérimentale mais également de travailler sur des hypothèses d'évolution des ces réseaux à partir d'hypothèses comportementales individuelles (le comportement relationnel des nœuds).

On cherchera notamment dans ces modèles génériques des effets de seuil ou de synchronisation qui seraient la cause de bifurcations dans la topologie du réseau.

D) applications sur des benchmark de réseaux réels

Le projet sera mené dans une démarche d'aller-retour entre la recherche de résultats théoriques sur les nouveaux concepts introduits et leur application sur des benchmarks de réseaux. Ainsi les approches seront testées sur des collections de réseaux réels disponibles dans la littérature, ainsi que sur une base de benchmarks de réseaux bien documentés qui sera produite dans le cadre du projet transversal ToCoNet financé par l'IDEX Toulouse. Dans chacun des champs d'application, on évaluera la capacité de nos modèles génériques à reproduire les dynamiques de structures qui sont en jeu dans les réseaux. Deux types de réseaux réels seront utilisés en priorité : un réseau de sociabilité de la paysannerie médiévale (projet GRAPHCOMP 2005-2008) et un réseau de dynamiques parcellaires de l'époque médiévale à l'époque moderne (projet MODELESPACE 2010-2012). Concernant ces deux projets, certaines questions restées en suspens pourraient être utilement abordées avec cette nouvelle méthode. Pour les réseaux sociaux paysans, il s'agit d'améliorer nos modèles et de savoir par exemple si certains paysans ou certaines familles ont une stratégie de « brokers » vis à vis des seigneurs ou d'autres communautés paysannes. Concernant la dynamique des parcellaires, les sources étant fiscales les biens nobles ne sont pas décrits (car non soumis à l'impôt) et constituent donc des « trous » dans le graphe d'adjacence des parcellaires. Ces parties non-denses correspondant à des biens nobles sont structurantes pour le territoire. Il s'agit donc de revisiter la dynamique de ces parties du réseau avec des modèles renouvelés. Ceci pourrait nous renseigner sur les stratégies de concentration ou de dispersion des terroirs seigneuriaux.

- [1] Dorogovtsev, S.; Goltsev, A.; Mendes, J. (2002). "Pseudofractal scale-free web". *Physical Review E* **65** (6).
- [2] Barabási, A. L. S.; Ravasz, E. B.; Vicsek, T. S. (2001). "Deterministic scale-free networks". *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* **299** (3-4): 559.
- [3] Renaud Lambiotte (2013) Multi-scale Modularity and Dynamics in Complex Networks. In *Dynamics On and Of Complex Networks, Volume 2*, Part of the series *Modeling and Simulation in Science, Engineering and Technology* pp 125-141, Springer New York
- [4] Ravasz, E. B.; Barabási, A. L. S. (2003). "Hierarchical organization in complex networks". *Physical Review E* **67** (2).
- [5] Burt, R. (1992) *Structural Holes : The Social Structure of Competition*. Harvard University Press.
- [6] Boulet R, Fieux E, Jouve B (2010) Simplicial simple-homotopy of flag complexes in terms of graphs. *European Journal of Combinatorics* 31: 161-176
- [7] Barabási, Albert-László; Albert, Réka (October 1999). "Emergence of scaling in random networks" (PDF). *Science* 286 (5439): 509-512.